Aufgabe 1

(a) Formalisieren Sie folgenden Auszug aus der Spezifikation einer Steuerung für zwei Ampeln, die an der Kreuzung zweier Einbahnstraßen stehen, in der Aussagenlogik.

- Beide Ampeln haben jeweils ein grünes, ein gelbes und ein rotes Licht. Zu jedem Zeitpunkt leuchtet genau ein Licht.
- Es kommt nicht vor, dass an den Ampeln gleichzeitig die beiden grünen Lichter leuchten.
- Wenn an einer Ampel das rote Licht leuchtet, dann leuchtet an der jeweils anderen Ampel entweder das grüne oder das gelbe Licht.

(b) Geben Sie (i) ein Modell Ihrer Spezifikation an und (ii) eine Interpretation, die die Spezifikation nicht erfüllt.

(c) Wäre die Spezifikation für praktische Anwendungen ausreichend?

Aufgabe 2

(i) Ist die folgende Formel eine Tautologie, erfüllbar oder unerfüllbar?

$$((X \wedge Y) \rightarrow Z) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z)).$$

(ii) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X).$$

Aufgabe 3

Jedem Wort $w = w_1 \dots w_n$ der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$ ordnen wir eine aussagenlogische Interpretation $\mathfrak{I}_w : \{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ durch die Vorschrift $\mathfrak{I}_w(X_i) = 1 \Leftrightarrow w_i = 1$ zu. Eine aussagenlogische Formel $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ *axiomatisiert* die Menge aller Wörter $w \in \{0, 1\}^n$ mit $\mathfrak{I}_w \models \varphi$.

(a) Beschreiben Sie die durch die Formel $(X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_3)$ axiomatisierte Menge von Wörtern (für $n = 3$).

(b) Geben Sie eine Formel $\varphi(X_1, \dots, X_6)$ an, die das Wort $(01)^3$ axiomatisiert.

(c) Geben Sie für $n \geq 1$ eine Formel $\varphi_n(X_1, \dots, X_n)$ an, die die Menge aller Wörter der Länge n axiomatisiert, die nicht das Infix 000 enthalten.