

## 11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 06.07. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

### Aufgabe 1

10 Punkte

- (a) Sei  $\mathfrak{A}_n = (A, E)$  eine Struktur mit einer Äquivalenzrelation  $E$ , welche unendlich viele Äquivalenzklassen hat, die alle die Größe  $n$  haben. Bestimmen Sie für alle Zahlen  $m, n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ , ob gilt  $\mathfrak{A}_{n_0} \equiv_m \mathfrak{A}_{n_1}$ .
- (b) Geben Sie für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  und Äquivalenzrelationen  $E$  und  $F$  ein Kriterium dafür an, dass  $(A, E) \not\equiv_m (B, F)$ ?

### Aufgabe 2

10 Punkte

Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\tau$ -Struktur sowie  $\sim$  und  $\sim'$  zwei Kongruenzrelationen auf  $\mathfrak{A}$ . Wir sagen  $\sim$  ist gröber als  $\sim'$  (bzw.  $\sim'$  ist feiner als  $\sim$ ), falls für alle  $a \in A$  gilt  $[a]_{\sim} \supseteq [a]_{\sim'}$ . Zeigen oder widerlegen sie, dass zu jeder Struktur eine gröbste und eine feinste Kongruenzrelation existiert.

### Aufgabe 3

10 Punkte

Sei  $C$  eine Menge von Konstanten mit  $c_0, c_1 \in C$ . Sei ferner  $T := \{c_i = c_j : c_i, c_j \in C - \{c_0\}\} \cup \{f^2 c_0 = f^2 c_1, f^5 c_0 = f c_1\} \cup \{Rc_0, Rf^3 c_1\}$ ,  $\Sigma$  die kleinste Menge, die  $T$  enthält und unter Substitution abgeschlossen ist, sowie  $\sim$  die von  $\Sigma$  induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur  $\mathfrak{H}(\Sigma)$ .

- (a) Beschreiben Sie  $\Sigma$ .
- (b) Beschreiben Sie  $\mathfrak{H}(\Sigma)$  und die kanonische Struktur  $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$ .
- (c) Ist  $\mathfrak{A}(\Sigma)$  ein Modell von  $T$ ?
- (d) Sei  $T' := T \cup \{\exists x(Rx \wedge Rfx)\}$ . (Dann ist  $\Sigma$  auch der Abschluss von  $T'$  unter Substitution.) Zeigen Sie:  $T'$  ist erfüllbar, aber  $\mathfrak{A}(\Sigma) \not\models T'$ .