

## 10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 29.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

### Aufgabe 1

10 Punkte

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei  $\Phi$  eine Menge von FO-Formeln über einer relationalen Signatur  $\tau$ ,  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi)$  die durch  $\Phi$  axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei  $\mathcal{B}$  eine  $\tau$ -Struktur. Wenn für jedes  $m \in \mathbb{N}$  ein  $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$  existiert mit  $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$ , dann gilt  $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ .

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, nicht FO-axiomatisierbar ist.

### Aufgabe 2

10 Punkte

(a) Beweisen Sie die Korrektheit der Quantorenregeln ( $\forall \Rightarrow$ ) und ( $\Rightarrow \forall$ ). Zeigen Sie, dass in der Regel ( $\Rightarrow \forall$ ) die Bedingung, dass  $c$  nicht in  $\Gamma, \psi$  und  $\Delta$  vorkommt, nicht weggelassen werden kann.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln.

(i)

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \leftrightarrow \vartheta}$$

(ii)

$$\frac{\Gamma, \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta, \varphi(c)}$$

### Aufgabe 3

10 Punkte

(a) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:

(i)  $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi$ .

(ii)  $\neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x)$ .

Hinweis: Die Gültigkeit von Formeln entspricht der Korrektheit gewisser Sequenzen.

(b) Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier  $x$  rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.“ und beweisen Sie anhand des Sequenzenkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann. (*Hinweis*: Sie können annehmen, dass das Universum ein Dorf ist.)