Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2011

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 01.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie jeweils ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem für die folgenden Klassen von Strukturen an:

(a) $\mathcal{K}_1 := \{(A, f) \ : \ \{f(a) : a \in A\} \text{ ist unendlich}\}$.

(b) $\mathcal{K}_2 := \{(A, f) \ : \ |A \setminus \{f(a) : a \in A\}| = 42\}$.

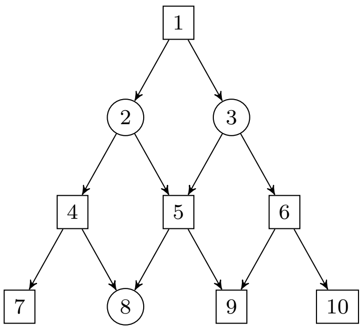
(c) $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) \ : \ |\{f^n(a) \ : \ n \in \mathbb{N}\}| \leq 13 \text{ für alle } a \in A\}$.
Dabei bezeichnet $f^n : A \to A$ die n-fach iterierte Anwendung von f.

(d) $\mathcal{K}_4 := \{(A, f) \ : \ f \text{ ist injektiv aber nicht surjektiv}\}$,

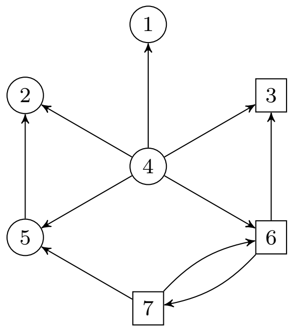
(e) $\mathcal{K}_5 := \{(A, f) \ : \ A \text{ ist endlich und } f \text{ ist injektiv aber nicht surjektiv}\}$,

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Wir betrachten folgende Spielgraphen (eingekreiste Knoten gehören Spieler 0).



$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$

(i) Berechnen Sie die Gewinnregionen W_0 und W_1 in den beiden Spielen.

(ii) Sind die Spiele fundiert? Sind sie determiniert?
(Ein Spiel heißt fundiert, wenn jede Partie endlich ist.)

(b) Wir betrachten den Körper mit zwei Elementen $\mathfrak{F}_2 := (\{0, 1\}, +, \cdot)$ und die Formel

$$\varphi := \forall x\big(x + x = x \to \exists y(x + y = y \wedge x \cdot y = x)\big).$$

(i) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$ an.

(ii) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler in $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$ an.

Aufgabe 3 10 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie für die folgenden Relationen jeweils, dass Sie in der jeweiligen Struktur elementar definierbar sind.

(a) die Menge der Primpotenzen und die Addition in $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(b) die Menge $\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Q}, +)$;

(c) die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ in $(\mathbb{C}, +)$;

(d) alle nicht-trivialen Teilmengen $A \subseteq \mathbb{Q}$ (d.h. $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{Q}$) in $(\mathbb{Q}, \leq)$.

(e) die Menge $\{0, 1\}$ in $(\{0, 1\}^*, \preceq)$. Dabei bezeichnet $\{0, 1\}^*$ die Menge aller endlichen Wörter über $\{0, 1\}$ und $\preceq$ bezeichnet die Präfix-Relation.