

### 3. Übung Mathematische Logik

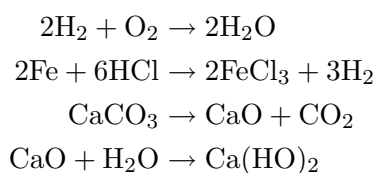
Abgabe: bis Mittwoch, den 12.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

#### Aufgabe 1

10 Punkte

In einem Chemielabor stehen die Apparaturen zur Verfügung, um folgende chemische Reaktionen durchzuführen:



Ferner sind folgende Grundstoffe (in beliebiger Menge) vorhanden: Fe, O<sub>2</sub>, HCl und CaCO<sub>3</sub>. Geben Sie eine Formalisierung in AL für die oben beschriebenen Sachverhalte an und beweisen Sie durch geeignete Anwendung des Erfüllbarkeitsalgorithmus für Horn-Formeln, dass es unter diesen Voraussetzungen möglich ist, Ca(HO)<sub>2</sub> herzustellen.

#### Aufgabe 2

10 Punkte

Zeigen Sie, dass man die Teilmengen von  $\mathbb{N}$  so in „große“ und „kleine“ Mengen einteilen kann, dass gilt:

- (1) Jede Teilmenge  $u \subseteq \mathbb{N}$  ist entweder groß oder klein, aber nicht beides.
- (2) Eine Menge ist genau dann groß, wenn ihr Komplement klein ist.
- (3) Teilmengen von kleinen Mengen sind auch klein.
- (4) Die Vereinigung zweier kleiner Mengen ist ebenfalls klein.
- (5) Alle endlichen Mengen sind klein.

*Hinweis:* Ordnen Sie jeder Menge  $u \subseteq \mathbb{N}$  eine Aussagenvariable  $X_u$  zu, mit der intendierten Interpretation, dass  $X_u$  wahr sein soll wenn  $u$  groß ist. Formalisieren Sie die Bedingungen (1) - (5) und benutzen Sie den Kompaktheitssatz, sowie die Beobachtung, dass man, wenn man Bedingung (5) weglässt, die anderen Bedingungen dadurch erfüllen kann, dass man eine feste Zahl  $n \in \mathbb{N}$  wählt und genau die Mengen als groß definiert, die  $n$  enthalten.

### Aufgabe 3

10 Punkte

Eine Formelmenge  $\Phi$  heißt *abhängig*, wenn es ein  $\varphi \in \Phi$  mit  $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$  gibt.

- (a) Wann ist eine Menge der Form  $\{\varphi\}$  für  $\varphi \in \text{AL}$  abhängig?
- (b) Zeigen Sie, dass jede endliche Formelmenge  $\Phi$  eine äquivalente unabhängige Teilmenge  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  enthält, d.h.  $\Phi_0$  ist nicht abhängig, und es gilt  $\Phi_0 \models \varphi$  für jedes  $\varphi \in \Phi$ .
- (c) Gilt diese Eigenschaft auch für unendliche Mengen? Betrachten Sie dazu die Menge

$$\Psi = \left\{ \bigwedge_{0 \leq i \leq n} X_i : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass jede zu  $\Psi$  äquivalente Teilmenge von  $\Psi$  abhängig ist. Geben Sie auch eine zu  $\Psi$  äquivalente, unabhängige Formelmenge an.

- (d) Beweisen Sie, dass eine Formelmenge  $\Phi$  genau dann abhängig ist, wenn eine endliche Teilmenge von  $\Phi$  abhängig ist.