Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 28.04. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

(a) Geben Sie (mit Begründung) an, ob folgende Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

(i) $(X \to 1) \to (0 \to Y)$

(ii) $(X \wedge (Y \to \neg X)) \to (1 \to Y)$

(iii) $\neg(\neg X \to (Y \to \neg X))$

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind.

(i) $X \to (Y \wedge Z)$ und $(X \to Y) \wedge (X \to Z)$

(ii) $(X \leftrightarrow \neg Y) \vee \neg X$ und $(X \wedge Y) \to \neg(Z \to X)$

Aufgabe 2 — 10 Punkte

(a) Eine AL-Formel heißt *kontingent* wenn sie erfüllbar aber keine Tautologie ist. Gibt es kontingente Formeln, deren Negation nicht kontingent ist?

(b) Sei $f \in B^3$ eine Boolsche Funktion, für die gilt:

$$f(x, \neg x, x) = f(x, 0, 0) = 1 \text{ und}$$
$$f(x, x, \neg x) = f(x, 1, 1) = 0.$$

Zeigen Sie, dass f eindeutig bestimmt ist, geben Sie eine AL-Formel $\varphi(X_1, X_2, X_3)$ an, die f definiert, und zeigen oder widerlegen Sie, dass $\{f\}$ funktional vollständig ist.

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Jedem ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \dots, n$ ordnen wir eine aussagenlogische Interpretation in folgender Weise zu: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

(i) Zeichnen Sie einen beliebigen Graphen mit 5 Knoten und beschreiben Sie diesen durch eine aussagenlogische Formel.

(ii) Geben Sie für jede natürliche Zahl n eine Formel φ_n an, die aussagt, dass der Graph keinen Zyklus enthält.

Aufgabe 4 10 Punkte

Betrachten Sie, für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Funktion g_n, welche aus Formeln $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ und $\psi(X_1, \dots, X_n)$ die neue Formel

$$g_n(\varphi, \psi) := (X_{n+1} \wedge \varphi(X_1, \dots, X_n)) \vee (\neg X_{n+1} \wedge \psi(X_1, \dots, X_n))$$

erzeugt.

(a) Zeigen Sie, dass $g_n(\varphi, \psi) \equiv g_n(\varphi', \psi')$ genau dann gilt, wenn $\varphi \equiv \varphi'$ und $\psi \equiv \psi'$.

(b) Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass es 2^{2^n} paarweise nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln φ mit $\tau(\varphi) = \{X_1, \dots, X_n\}$ gibt.

Bemerkung: Da es für jede natürliche Zahl n nur 2^{2^n} paarweise verschiedene n-stellige Boolesche Funktionen gibt und nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln verschiedene Boolesche Funktionen darstellen, folgt auf diese Art ebenfalls, dass jede n-stellige Boolesche Funktion durch eine aussagenlogische Formel mit Variablen $X_1, \dots, X_n$ dargestellt werden kann.