Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2009

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 23.07.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 2 + 3 + 2 + 3 Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein (endliches) Axiomensystem an.

(a) Die Klasse aller unendlichen linearen Ordnungen;

(b) Die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen;

(c) Die Klasse aller endlichen dichten linearen Ordnungen;

(d) Die Klasse aller Graphen, die einen zu $(\mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \subsetneq)$ isomorphen Subgraphen enthalten;

Aufgabe 2 10 Punkte

Beweisen Sie, dass die Klasse aller *archimedischen* Körper nicht FO-axiomatisierbar ist. Ein linear geordneter Körper $\mathfrak{K} = (K, +, \cdot, 0, 1, <)$ heißt archimedisch, wenn zu jedem $a \in K$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a < \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$ existiert.

Aufgabe 3 5 + 5 Punkte

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:
Sei Φ eine Menge von FO-Formeln über einer relationalen Signatur τ, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ die durch Φ axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur. Wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$, dann gilt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, nicht FO-axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4 5 + 5* Punkte

(a) Ist die folgende Schlussregel korrekt?

$$\frac{\Gamma,\ \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \psi(c) \Rightarrow \Delta,\ \varphi(c)}$$

(b)* Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier b rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren." und beweisen Sie anhand des Sequenzenkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Ableitung einer geeigneten Sequenz $\Gamma \Rightarrow \varnothing$, wobei Γ die obige Aussage formalisiert.

Aufgabe 5* 10* Punkte

Geben Sie einen Algorithmus an, der das Erfüllbarkeitsproblem für FO auf Strukturen der Größe höchstens n entscheidet. Hierbei ist n eine beliebige, aber feste natürliche Zahl.