

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 14.05.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie:

- Wenn $\Phi \models \varphi$, dann $\Psi \models \varphi$ für jede Formelmengemenge Ψ mit $\Psi \subseteq \Phi$.
- $\{\psi, \varphi\} \models \varphi \wedge \psi$
- Wenn $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$, dann gilt bereits $\Phi \models \varphi$.
- Wenn $\Phi \models \psi$, dann existiert eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ , so dass $\{\psi\} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi_0$.
- Wenn $\varphi_0 \rightarrow \vartheta$ und $\varphi_1 \rightarrow \neg\vartheta$ Tautologien sind, dann gilt $\{\varphi_0, \varphi_1\} \models \psi$ für jedes $\psi \in \text{AL}$.
- Wenn $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \models \varphi$.

Aufgabe 2

10 Punkte

Für ein Alphabet Σ bezeichnen wir die Menge aller endlichen Wörter über Σ durch Σ^* . Sei nun $\Sigma = \{0, 1\}$ und $A \subseteq \Sigma^*$ eine **unendliche** Menge von (endlichen) Σ -Wörtern. Zeigen Sie, dass es ein unendliches Wort $\alpha = a_0 a_1 \dots$ gibt, so dass jedes endliche Anfangsstück von α zu einem Wort aus A verlängert werden kann. Gilt diese Aussage auch, wenn Σ eine beliebige endliche Menge ist? Gilt die Behauptung auch für $\Sigma = \mathbb{N}$?

Aufgabe 3

10 Punkte

Eine Menge F von Funktionen heißt *maximal funktional unvollständig*, wenn

- sie nicht funktional vollständig ist und
- jede Menge $F \cup \{f\}$ ist funktional vollständig, wobei f eine beliebige Boolesche Funktion ist, die man nicht aus den Funktionen aus F (und der Identität) mit Hilfe der Komposition konstruieren kann.

Zeigen Sie, dass die Menge $F = \{0, 1, \wedge, \vee\}$ maximal funktional unvollständig ist.

Hinweis: Für die Maximalität zeigen Sie per Induktion über die Anzahl der Variablen, dass jede im üblichen Sinne monotone Boolesche Funktion (d. h., wird ein Argument größer, dann wird der Wert der Funktion nicht kleiner) durch Funktionen aus F darstellbar ist. Zeigen Sie ferner, dass sich aus einer beliebigen Funktion, die man nicht aus F konstruieren kann, die Negation konstruieren lässt.

Aufgabe 4

2 + 8 Punkte

Seien Φ und Θ zwei Formelmengen. Wir sagen, dass Θ aus Φ folgt ($\Phi \models \Theta$), wenn jede Formel $\vartheta \in \Theta$ aus Φ folgt. Sei $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Folge von erfüllbaren Formelmengen $\Phi_i \subseteq \text{AL}$, so dass $\Phi_{i+1} \models \Phi_i$ und $\Phi_i \not\models \Phi_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Sei Ψ eine erfüllbare Formelmengemenge, so dass $\Psi \models \Phi_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

- Zeigen Sie, dass die Menge Ψ existiert.
- Zeigen Sie, dass keine endliche Formelmengemenge Θ existiert, so dass $\Psi \models \Theta$ und $\Theta \models \Psi$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass eine Folge $(\Phi'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Formelmengen Φ'_i und Φ_i die gleichen Modelle haben und Folgendes gilt: $\Phi'_{i+1} \models \Phi'_i$, $\Phi'_i \not\models \Phi'_{i+1}$ und $\Phi'_i \subset \Phi'_{i+1}$.