

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 26.6. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

5*2 Punkte

(a) Geben Sie jeweils eine LTL-Formel ψ und eine FO-Formel $\varphi(x) \in \text{FO}(<, P, Q)$ an, so dass $\mathcal{W}, v_0 \models \psi$ bzw. $\mathcal{W} \models \varphi(v_0)$ genau dann gilt, wenn:

- (i) \mathcal{W} ist unendlich;
- (ii) Zwischen je zwei Knoten, an denen P gilt, liegt immer ein Knoten, an dem Q gilt;
- (iii) Nach jedem Knoten, an dem P gilt, folgen unendliche viele Knoten, an denen Q gilt.

Hierbei bezeichnet v_0 die erste Position im Wort \mathcal{W} .

(b) Geben Sie jeweils eine CTL-Formel ψ an, so dass $\mathcal{K}, v \models \psi$ genau dann gilt, wenn:

- (i) Auf jedem von v ausgehenden Pfad kommt höchstens ein Zustand vor, an dem P gilt;
- (ii) Auf jedem von v ausgehenden Pfad zu einem Zustand an welchem Q gilt, liegt ein Zustand, an dem P gilt.

Aufgabe 2

6+4 Punkte

Sei LTL(R) die Erweiterung von LTL um den binären Operator R (*Release*) mit folgender Semantik:

$$\mathcal{W}, v_i \models (\psi R \varphi) \Leftrightarrow \mathcal{W}, v_n \models \varphi \text{ für alle } n \geq i \text{ oder es gibt ein } n \geq i \text{ mit:} \\ \mathcal{W}, v_n \models \psi \text{ und } \mathcal{W}, v_j \models \varphi \text{ für alle } i \leq j \leq n.$$

- (a) Zeigen Sie, dass man zu jeder Formel $\psi \in \text{LTL}(\text{R})$ eine äquivalente LTL-Formel ψ^* konstruieren kann.
- (b) Zeigen Sie, dass man die Länge von ψ^* durch ein Polynom in der Länge von ψ beschränken kann (d.h. es gibt ein Polynom p , so dass $|\psi^*| \leq p(|\psi|)$ für alle $\psi \in \text{LTL}(\text{R})$ gilt).

Aufgabe 3

10 Punkte

Zeigen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass zu jeder CTL-Formel ψ eine äquivalente MSO-Formel $\varphi(x) \in \text{MSO}(E, (P_i)_{i \in I})$ existiert, d.h. für jedes Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E, (P_i)_{i \in I})$ und jeden Zustand $v \in V$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi$ gdw. $\mathcal{K} \models \varphi(v)$.

Hinweis: Es reicht, die Pfadquantoren EX, EG und $E(\cdot U \cdot)$ zu betrachten.