Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

9. Übung Mathematische Logik

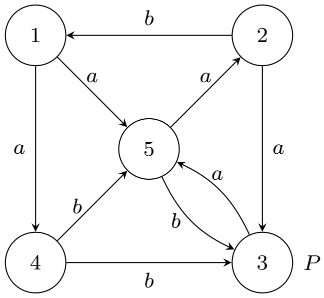
Abgabe: bis Donnerstag, den 19.6. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

4+6 Punkte

(a) Sei $\mathcal{K}$ das folgende Transitionssystem:



Berechnen Sie für jede der folgenden ML-Formen ψ die Extension $[\![\psi]\!]^{\mathcal{K}}$:

(i) $\psi_1 := [b]P$;

(ii) $\psi_2 := [b]\langle a\rangle 0$;

(iii) $\psi_3 := \langle a\rangle(P \vee [b]0)$;

(iv) $\psi_4 := [a]\langle b\rangle[b]\langle a\rangle 1$.

(b) Geben Sie zu den folgenden FO-Formeln $\varphi(x)$ jeweils eine äquivalente ML-Formel an, oder beweisen Sie, dass eine solche Formel nicht existiert:

(i) $\varphi_1(x) := \forall y \exists z(Exy \vee Eyz)$;

(ii) $\varphi_2(x) := \forall y \exists z(\neg Exy \vee Eyz)$;

(iii) $\varphi_3(x) := \exists y \forall z(Eyx \wedge Eyz \wedge Pz)$.

Aufgabe 2

3+2+2+3 Punkte

Seien $\mathcal{K}_j = (V^j, (E_a^j)_{a\in A}, (P_i^j)_{i\in I})$ für $j = 1, 2$ zwei Transitionssysteme, und seien $Z, Z' \subseteq V^1 \times V^2$ zwei Bisimulationen zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen ebenfalls Bisimulationen sind:

(a) $Z \cup Z'$;

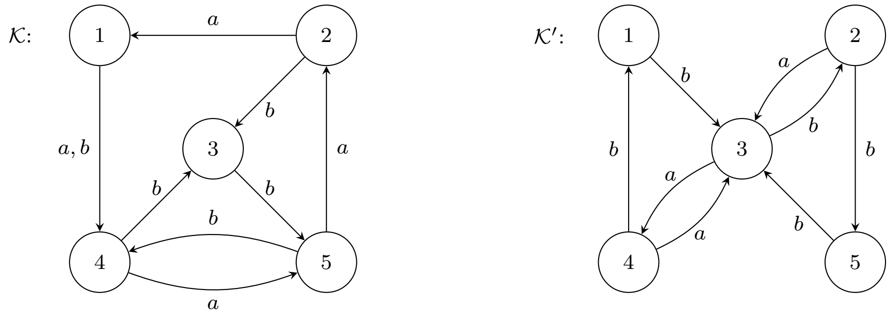
(b) $Z \cap Z'$;

(c) $(V^1 \times V^2) \setminus Z$;

(d) $\{(v_1, v_2) \in V^1 \times V^2 :$ es gibt $u_1 \in V^1$ und $u_2 \in V^2$ mit $(v_1, u_2), (u_1, u_2), (u_1, v_2) \in Z\}$.

Aufgabe 3 2+6+2 Punkte

Wir betrachten die folgenden Transitionssysteme $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$:



(a) Für welche Paare von Zuständen v in $\mathcal{K}$ und Zuständen v' in $\mathcal{K}'$ gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$?

(b) Geben Sie für alle Paare, wo dies nicht der Fall ist, die größte Zahl m an, so dass $\mathcal{K}, v \sim_m \mathcal{K}', v'$ gilt, und konstruieren Sie eine ML-Formel ψ der Modaltiefe $m + 1$ mit $\mathcal{K}, v \models \psi$ und $\mathcal{K}', v' \not\models \psi$.

(c) Geben Sie eine FO-Formel $\varphi(x)$ an, so dass $\mathcal{K} \models \varphi(2)$ und $\mathcal{K}' \not\models \varphi(2)$.