

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 24.4. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

3+3+4 Punkte

- (a) Überprüfen Sie mit Hilfe des Erfüllbarkeitstests für Horn-Formeln aus der Vorlesung, ob die folgende Folgerung gilt:

$$\{A \wedge B \rightarrow C, D \wedge E \rightarrow A, C \wedge F \rightarrow D, F \wedge D \rightarrow E\} \models B \vee C \vee (F \rightarrow B).$$

Geben Sie dabei für jeden Schritt des Algorithmus die Menge der markierten Variablen an.

- (b) Zu zwei aussagenlogischen Interpretationen \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 über dem gleichen Definitionsbereich σ definieren wir eine neue Interpretation $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 : \sigma \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) = \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X)).$$

Zeigen Sie, dass für jede Horn-Formel φ der Schnitt zweier Modelle wieder ein Modell ist, d.h. wenn $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, dann auch $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

- (c) Verwenden Sie (b) um zu zeigen, dass jede der folgenden Formeln nicht äquivalent zu einer Horn-Formel ist:
- (i) $X \rightarrow (Y \vee Z)$;
 - (ii) $(\neg Z \rightarrow (X \vee Y)) \wedge (Z \rightarrow Y)$.

Aufgabe 2

2+3+3+2 Punkte

Eine Formelmengemenge Φ heißt *abhängig*, wenn es ein $\varphi \in \Phi$ mit $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$ gibt.

- (a) Wann ist eine Menge der Form $\{\varphi\}$ für $\varphi \in \text{AL}$ abhängig?
- (b) Zeigen Sie, dass jede endliche Formelmengemenge Φ eine äquivalente unabhängige Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ enthält, d.h. Φ_0 ist nicht abhängig, und es gilt $\Phi_0 \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$.
- (c) Gilt diese Eigenschaft auch für unendliche Mengen? Betrachten Sie dazu die Menge

$$\Psi = \left\{ \bigwedge_{0 \leq i \leq n} X_i : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass jede zu Ψ äquivalente Teilmenge von Ψ abhängig ist. Geben Sie auch eine zu Ψ äquivalente, unabhängige Formelmengemenge an.

- (d) Beweisen Sie, dass eine Formelmengemenge Φ genau dann abhängig ist, wenn eine endliche Teilmenge von Φ abhängig ist.

Aufgabe 3

5*2 Punkte

Sei $\Phi \subseteq \text{AL}$ und $\varphi \in \text{AL}$. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Phi' \models \varphi$ für jede Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$.
- (b) Wenn $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Phi' \models \varphi$ für jede Obermenge $\Phi' \supseteq \Phi$.
- (c) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$, dann ist Φ unerfüllbar.
- (d) Wenn φ eine Tautologie ist, dann gilt $\Phi \models \varphi$.
- (e) Wenn φ unerfüllbar ist, dann gilt $\Phi \not\models \varphi$.

Stimmt eine Aussage nicht, geben Sie jeweils ein konkretes Gegenbeispiel an.