

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 17.4. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

2+2+2+2*+2* Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

- (a) $(X \rightarrow 1) \rightarrow (0 \rightarrow Y)$
- (b) $(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow (1 \rightarrow Y)$
- (c) $\neg(\neg X \rightarrow (Y \rightarrow \neg X))$
- (d)* $(1 \rightarrow (X \vee Y)) \wedge (0 \rightarrow (\neg X \wedge \neg Y))$
- (e)* $(X \wedge \neg Y) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow Z)$

Aufgabe 2

5+5 Punkte

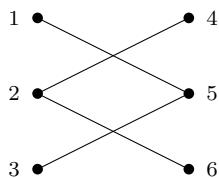
- (a) Finden Sie eine Formel $\varphi(X_0, X_1, X_2)$, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I} : \{X_0, X_1, X_2\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt, dass sich durch Ändern eines beliebigen Wahrheitswerts $\mathcal{I}(X_i)$ auch der Wahrheitswert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$ ändert.
- (b) Schreiben Sie eine Formel $\varphi(X_0, \dots, X_4)$, die genau dann gilt, wenn eine gerade Anzahl der Variablen X_i mit 1 belegt sind.

Aufgabe 3

3+4+3 Punkte

Jeden ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \dots, n$ identifizieren wir mit einer aussagenlogischen Interpretation in folgender Weise: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

- (a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die ausdrückt, dass der Graph die folgende Gestalt hat:



- (b) Konstruieren Sie zunächst für $n = 4$ und dann für beliebige n Formeln φ_n , die ausdrücken, dass der Graph zusammenhängend ist.
- (c) Konstruieren Sie für beliebige n Formeln φ_n , die ausdrücken, dass der Graph einen Hamiltonkreis enthält.

Aufgabe 4*

5*+5* Punkte

Sei $\psi \rightarrow \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Wir nennen ϑ einen *Interpolanten* für $\psi \rightarrow \varphi$, wenn $\psi \rightarrow \vartheta$ und $\vartheta \rightarrow \varphi$ Tautologien sind und $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\psi(\psi(1, Y), Y)$ ein Interpolant für $\psi(X, Y) \rightarrow \varphi(Y, Z)$ ist. Hierbei bezeichnet $\psi(\vartheta, Y)$ die Formel, die aus $\psi(X, Y)$ durch Ersetzen jedes Vorkommens von X durch die Formel ϑ entsteht.
- (b) Zeigen Sie per Induktion über die Anzahl der Aussagenvariablen, die in ψ aber nicht in φ vorkommen, dass zu jeder Tautologie $\psi \rightarrow \varphi$ ein Interpolant existiert (*aussagenlogisches Interpolationstheorem*).