

4. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 18.11., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

4 Punkte

- (a) Beweisen Sie, dass zu jedem Paritätsspiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ ein Paritätsspiel $\mathcal{G}' = (V, V_0, V_1, E, \Omega')$ existiert, bei dem $\Omega'(V) := \{\Omega'(v) : v \in V\}$ die Form $\{0, \dots, n\}$ oder $\{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ hat.
- (b) Für einen Spieler mit einer Sicherheitsgewinnbedingung ist jede Strategie, welche die Gewinnregion nicht verlässt, eine Gewinnstrategie. Beweisen oder widerlegen Sie, dass dies auch für Paritätsspiele gilt.

Aufgabe 2

8 Punkte

Ein Paritätsspiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ heißt *schwach*, wenn entlang jeder Kante $(v, w) \in E$ gilt: $\Omega(v) \leq \Omega(w)$.

- (a) Sei $m = \max(\Omega(V))$ und $V_m = \{v \in V : \Omega(v) = m\}$ die Menge der Spielpositionen von maximaler Priorität. Beweisen Sie, dass in einem schwachen Paritätsspiel die Menge $\text{Attr}_\sigma(V_m)$ eine Falle für Spieler $1 - \sigma$ ist. Gilt dies auch für allgemeine Paritätsspiele?
- (b) Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus an, der die Gewinnregionen in schwachen Paritätsspielen berechnet.

Aufgabe 3

6 Punkte

Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus an, der die Gewinnregionen in Paritätsspielen auf *ungerichteten* Bäumen bestimmt.

Aufgabe 4

12 Punkte

Ein *Büchi-Spiel* $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, F)$, wobei $F \subseteq V$, ist ein Spiel bei dem Spieler 0 eine unendlich lange Partie genau dann gewinnt, wenn unendlich oft Knoten aus der Menge F besucht werden. Wir sagen, dass Spieler 1 in diesem Spiel mit einer *coBüchi*-Gewinnbedingung spielt.

- (a) Präzisieren und beweisen Sie die Aussage, dass Büchi/coBüchi-Spiele Spezialfälle von Paritätsspielen sind.
- (b) Geben Sie einen Algorithmus an, der die Gewinnregionen beider Spieler in Büchi-Spielen in polynomieller Zeit berechnet.