Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Fischer

SS 2011

6. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 31. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.
Bitte beachten Sie, dass am 25. 5. keine Übung stattfindet.

Aufgabe 1

Geben Sie für ein Büchi-Spiel $G = (V, V_0, V_1, E, F)$ Formeln $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x) \in$ LFP an, die genau die Gewinnregionen von Spieler 0 und 1 definieren (und zeigen Sie dies).

Aufgabe 2

(a) Geben Sie für die folgende Mengen $X \subseteq \{0,1\}^\omega$ jeweils die kleinste Stufe Σ^0_α bzw. Π^0_α der Borel-Hierarchie an, die X enthält.

  (i) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : x$ enthält beliebig lange Infixe $10^n1\}$;

  (ii) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega :$ enthält x das Infix 00 unendlich oft, dann auch das Infix $11\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Stufe Σ^0_α bzw. Π^0_α der Borel-Hierarchie unter endlicher Vereinigung und endlichem Schnitt abgeschlossen ist.

(c) Zu einer Sprache $W \subseteq A^*$ von endlichen Wörtern definieren wir die folgende Sprache $\lim W \subseteq A^\omega$ von unendlichen Wörtern:

$$\lim W = \{x \in A^\omega : \text{ex. unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x_0 \dots x_n \in W\}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $L \subseteq A^\omega$ gilt: $L \in \Pi^0_2 \Longleftrightarrow L = \lim W$ für ein $W \subseteq A^*$.

Aufgabe 3

Seien $X \subseteq A^\omega$ und $Y \subseteq B^\omega$ Borel-Mengen. Wir sagen, dass X und Y *unvergleichbar* sind, wenn weder $X \leq Y$ noch $Y \leq X$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe von Wadge-Spielen:

(a) Sind X und Y unvergleichbar, so gilt $X \leq B^\omega \setminus Y$ und $B^\omega \setminus Y \leq X$.

(b) Keine drei Borel-Mengen sind unvergleichbar.