Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Fischer

SS 2011

5. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 17. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{K} = (V, E, P)$ eine Kripke-Struktur und $\sim$ die maximale Bisimulation auf $\mathfrak{K}$. Geben Sie eine LFP-Formel $\varphi(x, y)$ an, so dass $\mathfrak{K} \models \varphi(u, v)$ gdw. $\mathfrak{K}, u \sim \mathfrak{K}, v$, und beweisen Sie dies.
Hinweis: Eine Bisimulation kann als größter Fixpunkt beschrieben werden.

Aufgabe 2

Die monadische Logik zweiter Stufe (MSO) ist eine Erweiterung der Prädikatenlogik erster Stufe um Quantoren über Mengenvariablen, d. h. wir erlauben zusätzlich Formeln der Form $\forall X\, \varphi(X)$ und $\exists X\, \varphi(X)$, wobei die Mengenvariable X in φ wie ein einstelliges Prädikat benutzt wird, mit folgender Semantik: $\mathfrak{A} \models \exists X \varphi(X)$ gdw. eine Teilmenge $A_0 \subseteq A$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi(A_0)$ (analog für $\forall X \dots$).

Geben Sie eine Übersetzung an, die jeder Formel $\varphi \in \mathrm{L}_\mu$ eine Formel $\varphi^*(x) \in$ MSO zuordnet, so dass $\mathfrak{K}, v \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{K} \models \varphi^*(v)$.

Aufgabe 3

Zu einem unendlichen Wort $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\ldots \in \{a, b\}^\omega$ definieren wir die Kripkestruktur $\mathfrak{K}_\alpha = (\mathbb{N}, E_a, E_b)$ mit

$$E_x := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}, \alpha(n) = x\}$$

für $x \in \{a, b\}$. Seien nun $\varphi_1 = \nu X.\mu Y.([a]X \wedge [b]Y)$ und $\varphi_2 = \mu Y.\nu X.([a]X \wedge [b]Y)$.

(a) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Sprachen $L_i = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega : \mathfrak{K}_\alpha, 0 \models \varphi_i\}$.
Hinweis: Betrachten Sie das Model-Checking-Spiel $\mathcal{G}(\mathfrak{K}_\alpha, \varphi_i)$.

(b) Gilt $\varphi_1 \models \varphi_2$ oder $\varphi_2 \models \varphi_1$ über allen Kripkestrukturen?