Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Fischer

SS 2011

3. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 3. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Wir betrachten FO+C, die Erweiterung der Prädikatenlogik um Zählquantoren $\exists^{\geq n}$ mit folgender Semantik:

$$\mathfrak{A} \models \exists^{\geq n} x\, \varphi(x, \bar{b}) \quad \text{gdw.} \quad \begin{array}{l}\text{es existieren mindestens } n \text{ verschiedene Elemente } a \in A \\ \text{mit } \mathfrak{A} \models \varphi(a, \bar{b}).\end{array}$$

(a) Ist FO+C ausdrucksstärker als FO?

(b) Passen Sie die Regeln des Auswertungsspiels für FO auf geeignete Weise an, um ein Auswertungsspiel für FO+C zu erhalten.

(c) Geben Sie die Größe des Spielgraphen eines FO+C Modelcheckingspiels und den Platzbedarf für die Repräsentation der Knoten an.

Aufgabe 2

Ein *Büchi-Spiel* $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, F)$, wobei $F \subseteq V$, ist ein Spiel, bei dem der Gewinner einer unendlichen Partie nach folgendem Kriterium ermittelt wird: Spieler 0 gewinnt die Partie genau dann, wenn unendlich oft Knoten aus der Menge F durchlaufen werden.

(a) Zeigen Sie, dass man zu jedem Büchi-Spiel auf dem gleichen Spielgraphen eine in dem Sinne äquivalente Paritätsgewinnbedingung mit zwei Prioritäten angeben kann, dass die Gewinnregionen der beiden Spieler im Paritäts- und im Büchi-Spiel übereinstimmen.

(b) Kann umgekehrt auch zu jedem Paritätsspiel mit zwei Prioritäten auf dem gleichen Spielgraphen eine äquivalente Büchi-Gewinnbedingung konstruiert werden?

(c) Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem die Gewinnregion von Spieler 0 in einem Büchi-Spiel in polynomialer Zeit berechnet werden kann.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ ein Paritätsspiel. Eine positionale Strategie σ nennen wir *homogen*, wenn sie für alle Knoten mit gleicher Nachfolgermenge den gleichen Nachfolger auswählt, d. h. falls

$$uE = vE \implies \sigma(u) = \sigma(v)$$

gilt. (Beachten Sie, dass $\Omega(u) \neq \Omega(v)$ möglich ist.)

Zeigen Sie, dass Paritätsspiele homogen positional determiniert sind, dass es also positionale homogene Strategien σ_0 (für Spieler 0) und σ_1 (für Spieler 1) gibt, so dass σ_i von allen Knoten in der Gewinnregion W_i von Spieler i eine Gewinnstrategie ist.

Hinweis: Konstruieren Sie zu $\mathcal{G}$ ein neues Paritätsspiel, in dem für alle Knoten mit gleicher Nachfolgermenge ein neuer gemeinsamer Nachfolger eingeführt wird, der mit allen ursprünglichen Nachfolgern verbunden ist (siehe Abbildung), und verwenden Sie anschließend den Satz über die positionale Determiniertheit von Paritätsspielen.