

## 5. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 26. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

### Aufgabe 1

- (a) Sei  $(\mathbb{N}, s)$  die Struktur der natürlichen Zahlen mit der Nachfolgefunktion  $s(x) := x + 1$ . Geben Sie LFP-Formeln an, welche die Addition, Multiplikation und Exponentiation definieren, d. h.  $\varphi_+(x, y, z)$  gilt genau dann, wenn  $x + y = z$  usw.
- (b) Geben Sie  $L_\mu$ -Formeln an, welche besagen, dass
- es einen Pfad gibt, auf dem irgendwann nur noch Zustände aus  $P$  vorkommen;
  - auf allen Pfaden immer wieder ein Zustand aus  $P$  vorkommt;
  - auf allen Pfaden, immer wenn ein Zustand aus  $P$  auftaucht, es von diesem Zustand aus einen Pfad zu einem Zustand aus  $Q$  gibt.

### Aufgabe 2

Sei  $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$  mit  $\Omega : V \rightarrow \{0, \dots, d-1\}$  ein Paritätsspiel. Wir sagen, dass  $\mathcal{G}$  *nicht-terminierend* ist, wenn jeder Knoten mindestens einen Nachfolger hat. Weiter sagen wir, dass  $\mathcal{G}$  ein *Solitärspiel* ist, wenn jeder Knoten  $v \in V_1$  höchstens einen Nachfolger hat.

Eine Funktion  $f : V \rightarrow (\mathbb{N}^d \cup \{\top\})$  heißt (absteigendes) *Fortschrittsmaß für  $\mathcal{G}$* , wenn für alle  $v \in V$  mit  $f(v) \neq \top$  folgende Bedingungen gelten:

- Ist  $v \in V_0$ , dann gilt  $f(w) \leq_{\Omega(v)} f(v)$  für alle  $w \in vE$ ;
- ist  $v \in V_0$  und  $\Omega(v)$  gerade, dann gilt  $f(w) <_{\Omega(v)} f(v)$  für alle  $w \in vE$ ;
- ist  $v \in V_1$ , dann gibt es ein  $w \in vE$  mit  $f(w) \leq_{\Omega(v)} f(v)$ ;
- ist  $v \in V_1$  und  $\Omega(v)$  gerade, dann gibt es ein  $w \in vE$  mit  $f(w) <_{\Omega(v)} f(v)$ ;

wobei  $\leq_i$  die in der Vorlesung definierte lexikographische Ordnung auf den ersten  $i$  Komponenten von Tupeln aus  $\mathbb{N}^d$  mit maximalem Element  $\top$  bezeichnet.

- (a) Sei  $\mathcal{G}$  ein endliches, nicht-terminierendes Solitärspiel, in dem Spieler 1 von jedem Knoten gewinnt. Für  $v \in V$  und  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  sei  $\Pi_i(v)$  die Menge aller unendlichen Pfade durch  $\mathcal{G}$ , die in  $v$  starten und keinen Knoten der Priorität  $< i$  enthalten, sowie  $a_i(v)$  die maximale Anzahl von Knoten der Priorität  $i$ , die auf einem Pfad  $\pi \in \Pi_i(v)$  vorkommen kann, d.h.

$$a_i(v) = \sup\{|\{k \in \mathbb{N} : \Omega(\pi(k)) = i\}| : \pi \in \Pi_i(v)\},$$

wobei  $\sup \emptyset = 0$ .

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : V \rightarrow \{0, \dots, |V|\}^d : v \mapsto (a_0(v), 0, a_2(v), \dots)$  ein Fortschrittsmaß für  $\mathcal{G}$  ist. Zeigen Sie dazu zunächst, dass  $f$  wohldefiniert ist.

- (b) Sei nun  $\mathcal{G}$  ein beliebiges endliches, nicht-terminierendes Paritätsspiel. Zeigen Sie, dass ein Fortschrittsmaß  $f : V \rightarrow \{0, \dots, |V|\}^d \cup \{\top\}$  für  $\mathcal{G}$  existiert, so dass die Gewinnregion von Spieler 1 genau die Menge  $\{v \in V : f(v) \neq \top\}$  ist.

### Aufgabe 3

Sei  $\mathfrak{K} = (V, E, P)$  eine Kripke-Struktur und  $\sim$  die maximale Bisimulation auf  $\mathfrak{K}$ . Geben Sie eine LFP-Formel  $\varphi(x, y)$  an, so dass  $\mathfrak{K} \models \varphi(u, v)$  gdw.  $\mathfrak{K}, u \sim \mathfrak{K}, v$ , und beweisen Sie dies.

*Hinweis:* Eine Bisimulation kann als größter Fixpunkt beschrieben werden.