Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2009

4. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 19. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Ein *Büchi-Spiel* $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, F)$, wobei $F \subseteq V$, ist ein Spiel, bei dem der Gewinner einer unendlichen Partie nach folgendem Kriterium ermittelt wird: Spieler 0 gewinnt die Partie genau dann, wenn unendlich oft Knoten aus der Menge F durchlaufen werden.

(a) Zeigen Sie, dass man zu jedem Büchi-Spiel auf dem gleichen Spielgraphen eine in dem Sinne äquivalente Paritätsgewinnbedingung mit zwei Prioritäten angeben kann, dass die Gewinnregionen der beiden Spieler im Paritäts- und im Büchi-Spiel übereinstimmen.

(b) Kann umgekehrt auch zu jedem Paritätsspiel mit zwei Prioritäten auf dem gleichen Spielgraphen eine äquivalente Büchi-Gewinnbedingung konstruiert werden?

(c) Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem die Gewinnregion von Spieler 0 in einem Büchi-Spiel in polynomialer Zeit berechnet werden kann.

Aufgabe 2

(a) Seien in einem Paritätsspiel f und f' positionale Gewinnstrategien für Spieler σ auf den Regionen W bzw. W'. Zeigen Sie, dass die Strategien geeignet kombiniert werden können, um eine Gewinnstrategie auf der Region $W \cup W'$ zu erhalten. Beachten Sie, dass die Regionen W und W' nicht notwendigerweise disjunkt sein müssen.

(b) Sei $\mathcal{G}$ ein Paritätsspiel mit Gewinnregionen W_0 und W_1. Offensichtlich muss jede Gewinnstrategie von Spieler 0 innerhalb der Gewinnregion W_0 bleiben, d. h. es muss $f(V_0 \cap W_0) \subseteq W_0$ gelten. Andererseits ist dies kein hinreichendes Kriterium für eine Gewinnstrategie. Geben Sie ein Paritätsspiel und eine positionale Strategie für Spieler 0 an, so dass alle mit f konsistenten Partien in W_0 bleiben, aber trotzdem von Spieler 1 gewonnen werden.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ ein Paritätsspiel. Eine positionale Strategie σ nennen wir *homogen*, wenn sie für alle Knoten mit gleicher Nachfolgermenge den gleichen Nachfolger auswählt, d. h. falls

$$uE = vE \implies \sigma(u) = \sigma(v)$$

gilt. (Beachten Sie, dass $\Omega(u) \neq \Omega(v)$ möglich ist.)

Zeigen Sie, dass Paritätsspiele homogen positional determiniert sind, dass es also positionale homogene Strategien σ_0 (für Spieler 0) und σ_1 (für Spieler 1) gibt, so dass σ_i von allen Knoten in der Gewinnregion W_i von Spieler i eine Gewinnstrategie ist.

Hinweis: Konstruieren Sie zu $\mathcal{G}$ ein neues Paritätsspiel, in dem für alle Knoten mit gleicher Nachfolgermenge ein neuer gemeinsamer Nachfolger eingeführt wird, der mit allen ursprünglichen Nachfolgern verbunden ist (siehe Abbildung), und verwenden Sie anschließend den Satz über die positionale Determiniertheit von Paritätsspielen.