Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2009

2. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 5. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Definitionen für die Mengen W_σ^n von Knoten, von denen aus Spieler σ eine Strategie hat, in höchstens n Zügen zu gewinnen:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \qquad W_\sigma^0 &:= \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \emptyset\} \\
W_\sigma^{n+1} &:= \{v \in V_\sigma \ : \ vE \cap W_\sigma^n \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq W_\sigma^n\} \\
\text{(ii)} \qquad \widetilde{W}_\sigma^0 &:= \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \emptyset\} \\
\widetilde{W}_\sigma^{n+1} &:= \widetilde{W}_\sigma^n \cup \left\{v \in V_\sigma \ : \ vE \cap \widetilde{W}_\sigma^n \neq \emptyset\right\} \cup \left\{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq \widetilde{W}_\sigma^n\right\}
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass beide Definitionen äquivalent sind, d. h. dass $W_\sigma^n = \widetilde{W}_\sigma^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2

Aussagenlogische Hornformeln sind Formeln der Form $\bigwedge C_i$, wobei jede Klausel C_i die Form

$$\begin{aligned}
X_1 \wedge \ldots \wedge X_n &\rightarrow X \quad \text{oder} \\
\underbrace{X_1 \wedge \ldots \wedge X_n}_{\text{body}(C_i)} &\rightarrow \underbrace{0}_{\text{head}(C_i)}
\end{aligned}$$

hat. Eine Klausel der Form X bzw. $1 \rightarrow X$ hat einen leeren Rumpf.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass zu jeder Hornformel ψ ein Spiel $\mathcal{G}_\psi = (V, V_0, V_1, E)$ konstruiert werden kann mit

$$\begin{aligned}
V &= \underbrace{\{0\} \cup \{X_1, \ldots, X_n\}}_{V_0} \cup \underbrace{\{C_i : i \in I\}}_{V_1} \text{ und} \\
E &= \{X_j \rightarrow C_i : X_j = \text{head}(C_i)\} \cup \{C_i \rightarrow X_j : X_j \in \text{body}(C_i)\}.
\end{aligned}$$

Umgekehrt kann zu jedem Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ eine Hornformel $\psi_\mathcal{G}$ mit folgenden Klauseln konstruiert werden:

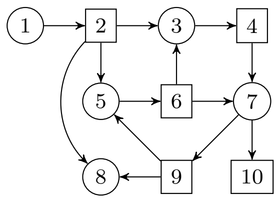
$$\begin{aligned}
v &\rightarrow u && \text{für alle } u \in V_0 \text{ und } (u, v) \in E, \\
v_1 \wedge \ldots \wedge v_m &\rightarrow u && \text{für alle } u \in V_1 \text{ und } uE = \{v_1, \ldots, v_m\}.
\end{aligned}$$

Es gilt, dass ψ genau dann unerfüllbar ist, wenn Spieler 0 das Spiel $\mathcal{G}_\psi$ von Position 0 aus gewinnt, und dass Spieler 0 ein Spiel $\mathcal{G}$ von Position v aus genau dann gewinnt, wenn $\psi_\mathcal{G} \wedge (v \rightarrow 0)$ unerfüllbar ist.

(a) Konstruieren Sie zu folgender Horn-Formel ψ das Erfüllbarkeitsspiel $\mathcal{G}_\psi$, und berechnen Sie die Gewinnregionen der beiden Spieler.

$$(1 \to X) \wedge (X \wedge Y \to Z) \wedge (U \to 0) \wedge (Z \wedge Y \to U) \wedge (V \to Y) \wedge (1 \to V)$$

(b) Konstruieren Sie zu folgendem Spielgraphen $\mathcal{G}$ die Hornformel $\psi_\mathcal{G}$ und bestimmen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus, ob Knoten 5 in der Gewinnregion von Spieler 0 liegt.



Aufgabe 3

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ ein Spielgraph ohne Terminalknoten und $X \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge der Knoten.

- Der *Attraktor* von X für Spieler σ ($\mathrm{Attr}_\sigma(X)$) ist die Menge der Knoten, von denen aus Spieler σ eine Strategie hat, die Menge X in endlich vielen Schritten zu erreichen. Entsprechend ist der *n-Attraktor* von X für Spieler σ ($\mathrm{Attr}^n_\sigma(X)$) die Menge der Knoten, von denen aus Spieler σ eine Strategie hat, die Menge X in n Schritten zu erreichen.

- Die Menge X ist eine *Falle* für Spieler σ, wenn Spieler $1 - \sigma$ von jeder Position $x \in X$ aus eine Strategie hat, dass die Menge X nicht mehr verlassen wird.

(a) Sei $\mathcal{G}_T = (V, V_0, V_1, E, T)$ ein Spielgraph expandiert um eine einstellige Relation T. Formulieren Sie in FO den Sachverhalt, dass
   (i) die Menge T eine Falle für Spieler 0 ist, und
   (ii) geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine FO-Formel φ_n an, die die Menge $\mathrm{Attr}^n_1(T)$ definiert.

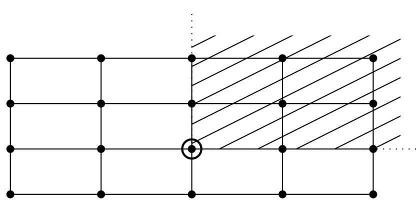
(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Attr}_\sigma(T)$ eine Falle für Spieler $1 - \sigma$ ist, falls T bereits eine Falle für Spieler $1 - \sigma$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass T genau dann eine Falle für Spieler σ ist, wenn $T = V - \mathrm{Attr}_\sigma(V - T)$.

Aufgabe 4

Eine rechteckige Schokoladentafel mit $n \times m$ Stücken kann als Gitter $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ aufgefasst werden, so dass die Gitterflächen den Stücken und die Knoten und Kanten des Gitters den Bruchstellen der Schokoladentafel entsprechen.

Wir betrachten folgendes Spiel auf einer rechteckigen Schokoladentafel: Die Spieler wählen abwechselnd (Spieler 0 beginnt) einen Gitterknoten und entfernen alle Schokoladenstücke, die sich rechts überhalb dieses Knotens befinden. Bei jedem Zug muss dabei mindestens ein Schokoladenstück entfernt werden. Verloren hat derjenige Spieler, der das letzte übrigbleibende Stück nehmen muss.



Zeigen Sie, dass (bis auf einen Sonderfall) immer der gleiche Spieler (welcher?) das Spiel gewinnt, egal wie groß die Schokoladentafel ist.

Hinweis: Geben Sie keine explizite Gewinnstrategie an, sondern folgern Sie deren Existenz aus dem Satz über die Determiniertheit endlicher Spiele.