

4. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 15. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

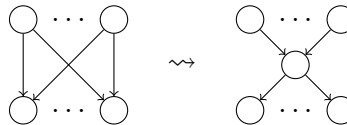
Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ ein Paritätsspiel. Eine positionale Strategie σ nennen wir *homogen*, wenn sie für alle Knoten mit gleicher Nachfolgermenge den gleichen Nachfolger auswählt, d. h. falls

$$uE = vE \implies \sigma(u) = \sigma(v)$$

gilt. (Beachten Sie, dass $\Omega(u) \neq \Omega(v)$ möglich ist.)

Zeigen Sie, dass Paritätsspiele homogen positional determiniert sind, dass es also positionale homogene Strategien σ_0 (für Spieler 0) und σ_1 (für Spieler 1) gibt, so dass σ_i von allen Knoten in der Gewinnregion W_i von Spieler i eine Gewinnstrategie ist.

Hinweis: Konstruieren Sie zu \mathcal{G} ein neues Paritätsspiel, in dem für alle Knoten mit gleicher Nachfolgermenge ein neuer gemeinsamer Nachfolger eingeführt wird, der mit allen ursprünglichen Nachfolgern verbunden ist (siehe Abbildung), und verwenden Sie anschließend den Satz über die positionale Determiniertheit von Paritätsspielen.



Aufgabe 2

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ mit $\Omega : V \rightarrow \{0, \dots, d-1\}$ ein Paritätsspiel. Wir sagen, dass \mathcal{G} *nicht-terminierend* ist, wenn jeder Knoten mindestens einen Nachfolger hat. Weiter sagen wir, dass \mathcal{G} ein *Solitärspiel* ist, wenn jeder Knoten $v \in V_0$ höchstens einen Nachfolger hat.

- (a) Zeigen Sie: Zu jedem Paritätsspiel \mathcal{G} lässt sich in Polynomialzeit ein äquivalentes nicht-terminierendes Paritätsspiel \mathcal{G}' über der gleichen Knotenmenge V konstruieren, so dass die Gewinnregionen erhalten bleiben.
- (b) Sei nun \mathcal{G} ein endliches, nicht-terminierendes Solitärspiel, in dem Spieler 0 von jedem Knoten gewinnt. Zu $v \in V$ und $i \in \{0, \dots, d-1\}$ sei $\Pi_i(v)$ die Menge aller unendlichen Pfade durch \mathcal{G} , die in v starten und keinen Knoten der Priorität $< i$ enthalten, sowie $a_i(v)$ die maximale Anzahl von Knoten der Priorität i , die auf einem Pfad $\pi \in \Pi_i(v)$ vorkommen kann, d. h.

$$a_i(v) = \sup\{|\{k \in \mathbb{N} : \Omega(\pi(k)) = i\}| : \pi \in \Pi_i(v)\},$$

wobei $\sup \emptyset = 0$.

Zeigen Sie: Die Funktion $f : V \rightarrow \{0, \dots, |V|\}^d : v \mapsto (0, a_1(v), 0, a_3(v), \dots)$ ist ein Fortschrittsmaß für \mathcal{G} (vgl. Übung 3). Zeigen Sie dazu zunächst, dass f wohldefiniert ist.

- (c) Sei nun \mathcal{G} ein beliebiges endliches, *nicht-terminierendes* Paritätsspiel. Zeigen Sie, dass ein Fortschrittsmaß $f : V \rightarrow \{0, \dots, |V|\}^d \cup \{\top\}$ für \mathcal{G} existiert, so dass die Gewinnregion von Spieler 0 genau die Menge $\{v \in V : f(v) \neq \top\}$ ist.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$, $n = |V|$, mit $\Omega : V \rightarrow \{0, \dots, d-1\}$ ein nicht-terminierendes Paritätsspiel, $[n] := \{0, \dots, n\}$ und \leq die lexikographische Ordnung auf $[n]^d \cup \{\top\}$ mit maximalem Element \top . Wir definieren die folgende partielle Ordnung \sqsubseteq auf der Menge aller Funktionen $f : V \rightarrow [n]^d \cup \{\top\}$:

$$f \sqsubseteq g \quad : \text{gdw} \quad f(v) \leq g(v) \text{ für alle } v \in V.$$

Für jedes $v \in V$ sei $\text{Lift}_v : ([n]^d \cup \{\top\})^V \rightarrow ([n]^d \cup \{\top\})^V$ definiert durch:

$$\text{Lift}_v(f)(u) = \begin{cases} f(u) & \text{falls } u \neq v, \\ \min\{\text{Prog}(v, f(w)) : w \in vE\} & \text{falls } u = v \in V_0, \\ \max\{\text{Prog}(v, f(w)) : w \in vE\} & \text{falls } u = v \in V_1. \end{cases}$$

Hierbei sei zu $v \in V$ und $x \in [n]^d \cup \{\top\}$

$$\text{Prog}(v, x) := \begin{cases} \top & \text{falls } x = \top, \\ \min\{y \in [n]^d : x \leq_{\Omega(v)} y\} & \text{falls } x < \top \text{ und } \Omega(v) \text{ gerade,} \\ \min\{y \in [n]^d \cup \{\top\} : x <_{\Omega(v)} y\} & \text{falls } x < \top \text{ und } \Omega(v) \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(Vgl. Übung 3 für die Definition von $<_i$.)

- Zeigen Sie, dass die Struktur $(([n]^d \cup \{\top\})^V, \sqsubseteq)$ einen (vollständigen) Verband bildet.
- Zeigen Sie: Für jedes $v \in V$ ist der Operator Lift_v monoton, d.h. aus $f \sqsubseteq g$ folgt auch $\text{Lift}_v(f) \sqsubseteq \text{Lift}_v(g)$.
- Zeigen Sie: Eine Funktion $f : V \rightarrow [n]^d \cup \{\top\}$ ist ein Fortschrittsmaß von \mathcal{G} genau dann, wenn $\text{Lift}_v(f) \sqsubseteq f$ für alle $v \in V$ gilt.
- Folgern Sie aus (a), (b) und (c), dass innerhalb der Menge $([n]^d \cup \{\top\})^V$ ein eindeutiges kleinstes Fortschrittsmaß f von \mathcal{G} existiert
- (Zusatzaufgabe)** Geben Sie einen Algorithmus an, der das Fortschrittsmaß aus (d) berechnet.