

## 7. Übung Algorithmische Modelltheorie II

Abgabe: bis Montag, 16. Juni um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

### Aufgabe 1

Sei  $\text{FO} + \text{DTC}^1$  das Fragment von  $\text{FO} + \text{DTC}$  bei dem nur transitive Hüllenbildung von *binären* Relationen erlaubt ist, d.h. der  $\text{dtc}$ -Operator kommt nur in der Form  $[\text{dte}_{x,y}\varphi](u, v)$  vor. Zeigen Sie dass  $\text{FO} + \text{DTC}^1$  über Wortstrukturen genau die regulären Sprachen definiert. *Hinweis:* Zur Definition von Wortstrukturen siehe Übungsblatt 6, Aufgabe 1.

### Aufgabe 2

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt *stabil*, falls es für jedes  $v \in V \setminus U$  einen Automorphismus  $\pi$  von  $G$  mit  $\pi(v) \neq v$  gibt, der  $\pi(u) = u$  für alle  $u \in U$  erfüllt. Zeigen Sie:

- (a) Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $U \subseteq V$  stabil.

Sei  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  eine Formel deren Konstanten in  $U$  interpretiert werden. Dann gilt für alle  $\bar{u} = u_1, \dots, u_k \in U$

$$G \models [\text{dte}_{\bar{x}, \bar{y}}\varphi](\bar{u}, \bar{v}) \Rightarrow \bar{v} = v_1, \dots, v_k \in U$$

- (b) Eine Graphenklasse  $\mathcal{C}$  heißt *flexibel*, falls es eine Funktion  $g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $G = (V, E) \in \mathcal{C}$  und alle  $W \subseteq V$  gilt, dass  $W$  in einer stabilen Menge der Größe maximal  $g(|W|)$  enthalten ist.

Zeigen Sie, dass über jeder flexiblen Graphenklasse  $\text{FO} + \text{DTC} = \text{FO}$  gilt.