

1. Übung Algorithmic Model Theory

Abgabe: bis Mittwoch, 28. April um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

Beweisen Sie:

- (a) Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv aufzählbar (r.e.) ist, dann ist auch L_1 r.e.
- (b) Wenn L r.e. ist und $L \leq \bar{L}$ gilt, dann ist L entscheidbar.
- (c) L ist genau dann entscheidbar, wenn L und \bar{L} r.e. sind.

Aufgabe 2

Sind folgende Probleme entscheidbar?

- (a) $L_a^n = \{\rho(M)\#\rho(x) : M \text{ hält auf der Eingabe } x \text{ nach höchstens } n \text{ Schritten}\}$
- (b) $L_b^n = \{\rho(M)\#\rho(x) : M \text{ hält auf der Eingabe } x \text{ nach wenigstens } n \text{ Schritten}\}$
- (c) $L_c = \{\rho(M) : L(M) = \Gamma^*\}$

Aufgabe 3

(a) Welche der folgende Paare von Entscheidungsproblemen sind rekursiv untrennbar?

(i) $\text{EQ} = \{\rho(M)\#\rho(M') \mid L(M) = L(M')\}$ und
 $\text{NEQ}^2 = \{\rho(M)\#\rho(M') \mid f_m \neq f_{M'} \text{ und } L(M) \neq L(M')\};$

(ii) $\text{NEQ} = \{\rho(M)\#\rho(M') \mid L(M) \neq L(M')\}$ und
 $\text{EQ}^\# = \{\rho(M)\#\rho(M') \mid M \text{ macht mehr Schritte auf } 010 \text{ als } M' \text{ und } L(M) = L(M')\}.$

(b) Gibt es zwei unentscheidbare disjunkte Probleme P_1 und P_2 , die nicht rekursiv untrennbar sind?

Aufgabe 4

Welche der folgenden Probleme sind rekursiv aufzählbar, welche co-rekursiv aufzählbar?

- (a) $\{\varphi \in \text{FO} \mid \text{alle endlichen Modelle von } \varphi \text{ haben gerade Größe}\}$
- (b) $\{\varphi \in \text{FO} \mid \text{es existiert } \psi \in \text{FO} \text{ mit } |\psi| < |\varphi|, \text{ so dass } \varphi \text{ und } \psi \text{ auf denselben endlichen Strukturen gelten}\}$