

Seminar Logik, Komplexität, Spiele: Strukturkomplexität von Graphen und Graph Searching Games SS 2010

Roman Rabinovich

Mathematische Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Erich Grädel
RWTH Aachen

16.04.2010

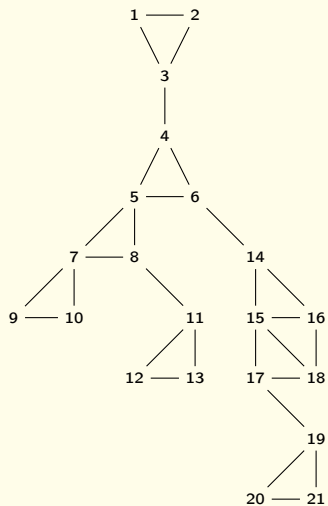
Problemstellung

- ▶ schwere Probleme auf Graphen: praktisch oft schnell lösbar
 - ▶ 3-Färbbarkeit, Hamiltonkreis, Paritätsspiele
- ▶ Grund: Nur einfache Instanzen werden eingegeben.
- ▶ Ziel: Klassifizierung der Graphen in **einfache** und **komplexe**

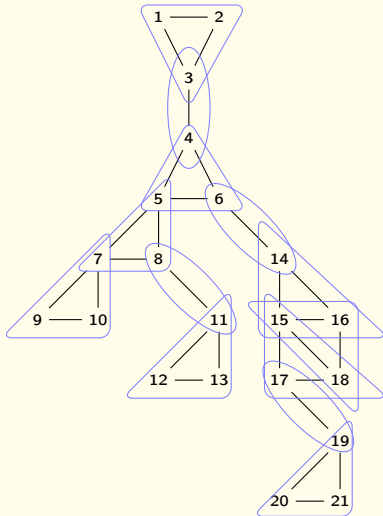
Ungerichtete Graphen

- ▶ Bäume sind **einfach**, Gitter sind **komplex**.
- ▶ **Einfach:**
 - ▶ ähnlich einem Baum
 - ▶ wenige, einfach verschachtelte Kreise
- ▶ **Komplex:**
 - ▶ ähnlich einem Gitter
 - ▶ viele, kompliziert verschachtelte Kreise

Baumzerlegung



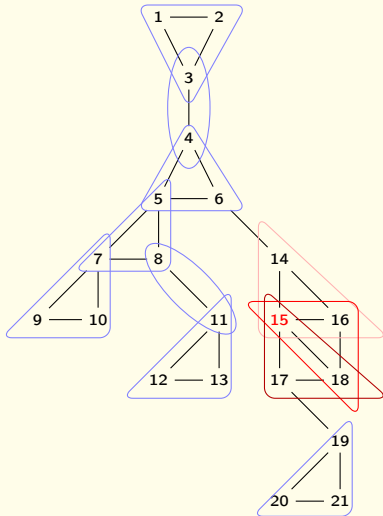
Baumzerlegung



Bags:

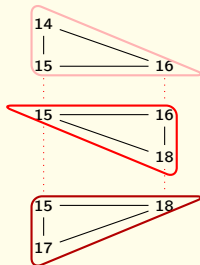
- sind baumartig verbunden
- enthalten jeden Knoten
- enthalten jede Kante

Baumzerlegung

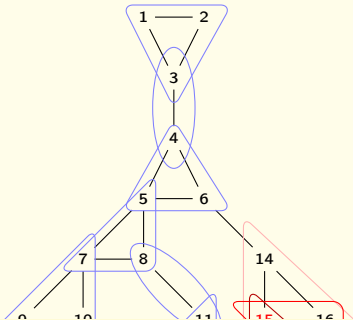


Bags:

- sind baumartig verbunden
 - enthalten jeden Knoten
 - enthalten jede Kante
- $v \in \text{Bag}_1$ und $v \in \text{Bag}_2$
 $\Rightarrow v$ in allen Bags dazwischen



Baumzerlegung

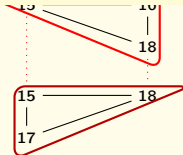


Bags:

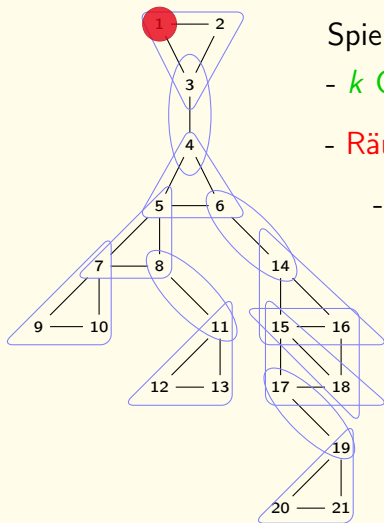
- sind baumartig verbunden
- enthalten jeden Knoten
- enthalten jede Kante

- $v \in \text{Bag}_1$ und $v \in \text{Bag}_2$
 $\Rightarrow v$ in allen Bags dazwischen

Baumweite: minimale Größe des größten Bags – 1



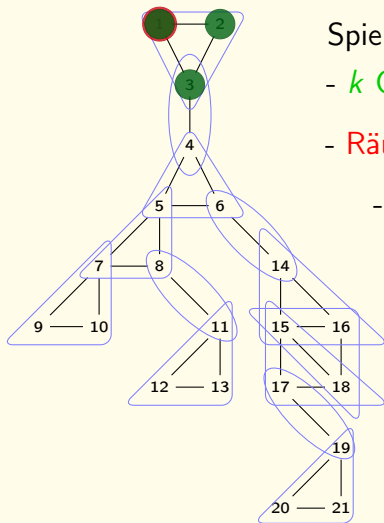
Spieltheoretische Charakterisierung



Spielregeln:

- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen

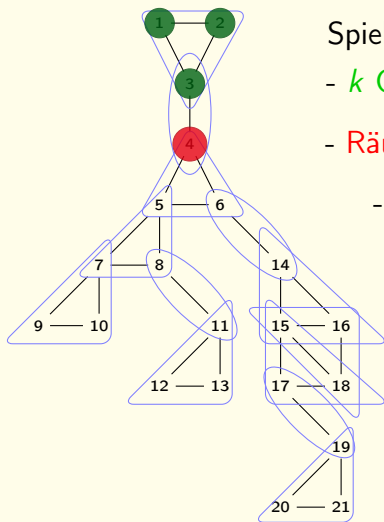
Spieltheoretische Charakterisierung



Spielregeln:

- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen

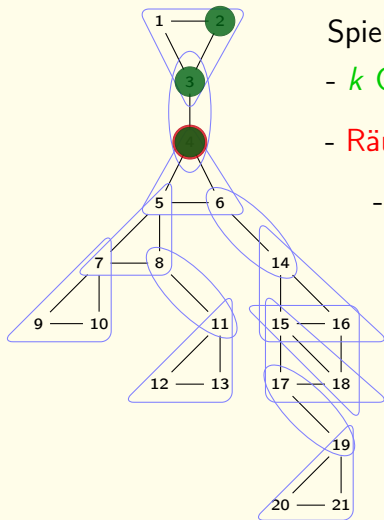
Spieltheoretische Charakterisierung



Spielregeln:

- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen

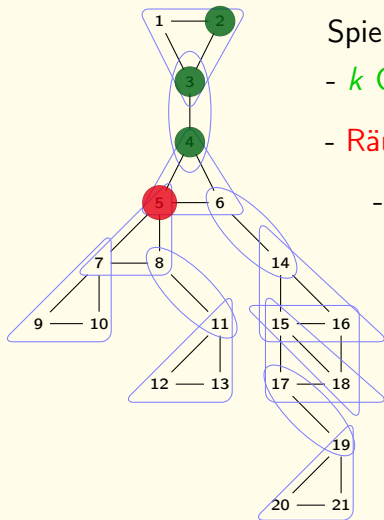
Spieltheoretische Charakterisierung



Spielregeln:

- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen

Spieltheoretische Charakterisierung



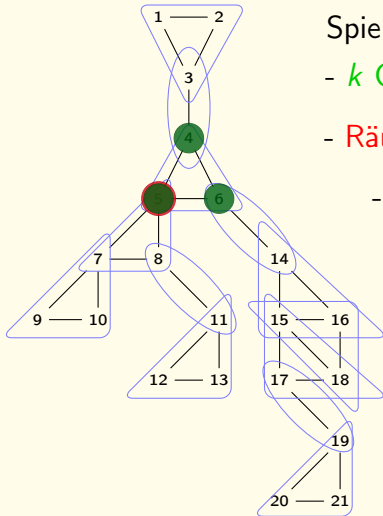
Spielregeln:

- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen

Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

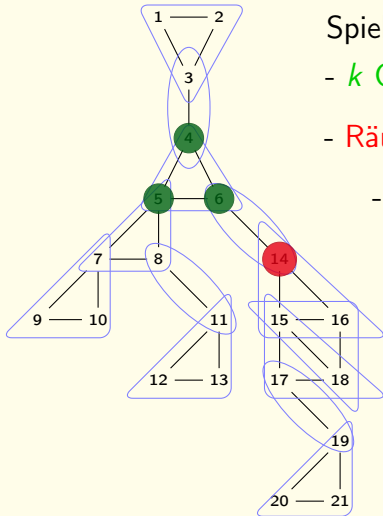
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

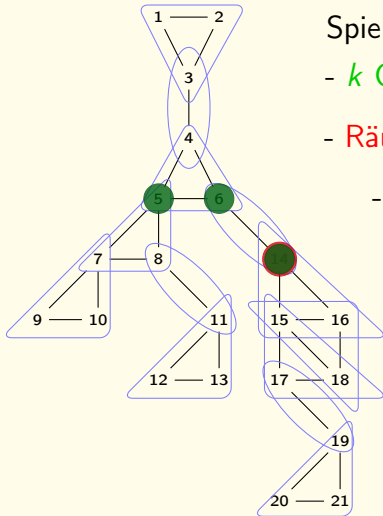
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

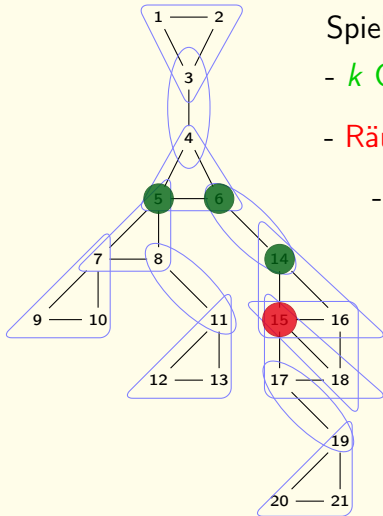
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

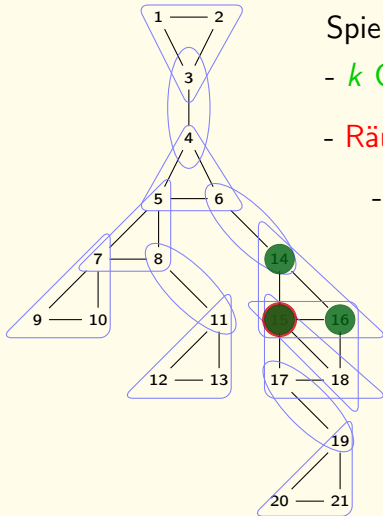
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

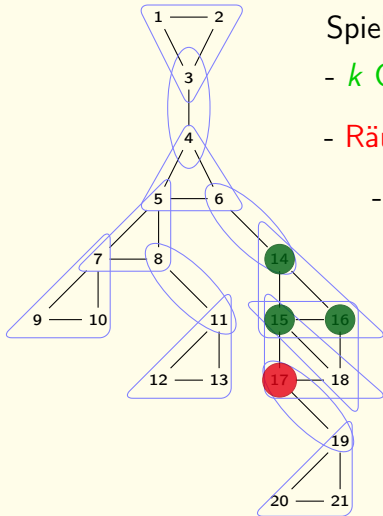
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

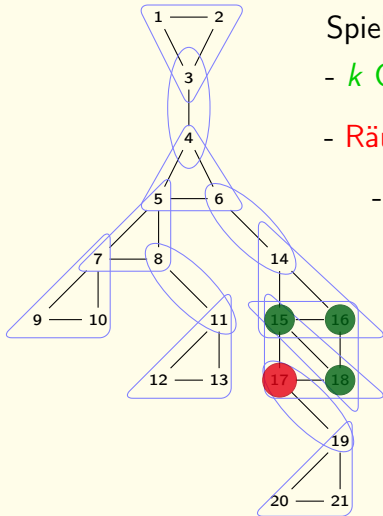
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

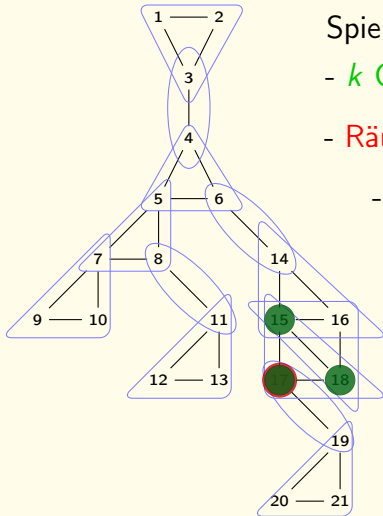
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

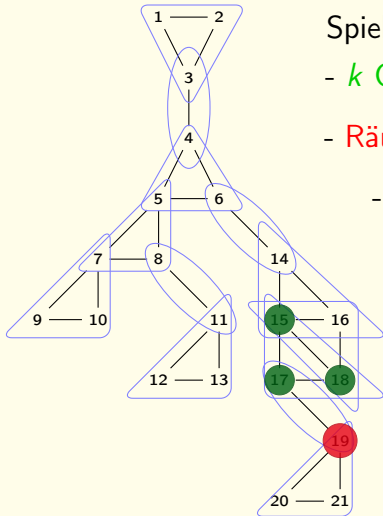
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

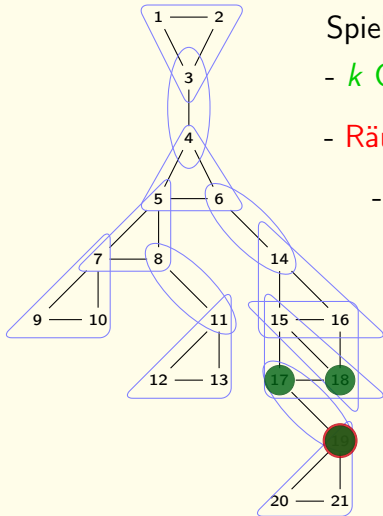
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

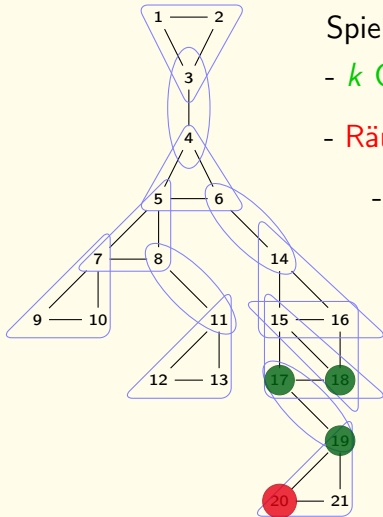
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

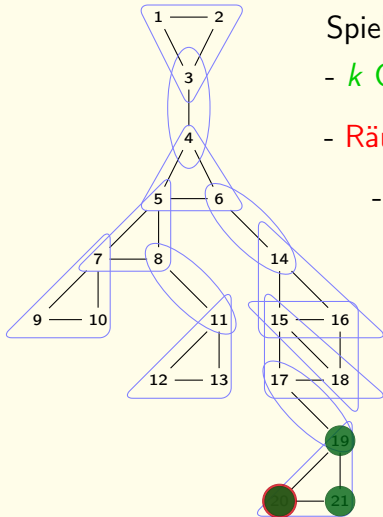
- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



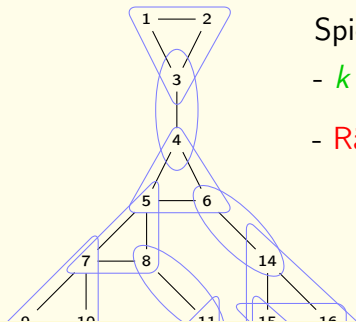
Spieltheoretische Charakterisierung

Spielregeln:

- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen



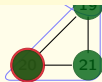
Spieltheoretische Charakterisierung



Spielregeln:

- k Cops, ein Räuber
- Räuber läuft entlang copfreien Pfaden
- Cops fliegen
- Cops wollen Räuber fangen

Baumweite = minimale Anzahl von Cops, die den Räuber fangen – 1



Monotonie

Gewinnstrategie für Cops heißt **monoton**, wenn sie garantiert, dass:

jeder für Räuber unerreichbare Knoten
bleibt immer unerreichbar.

Theorem

Um monoton zu gewinnen, braucht man keine zusätzlichen Cops.

- ▶ monotone Strategie für k Cops \Rightarrow Baumzerlegung mit $|\text{Bags}| \leq k$
- ▶ Baumzerlegung mit $|\text{Bags}| \leq k \Rightarrow$ monotone Strategie für k Cops

Induktiver Aufbau des Graphen

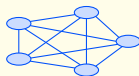
Jeden Graphen mit Baumweite k kann man so konstruieren:

1. k -Baum

- 1.1 k -Clique ist ein k -Baum

- 1.2 H ist k -Baum $\Rightarrow H + v$ ist k -Baum

2. Teilgraphen bilden



Induktiver Aufbau des Graphen

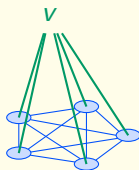
Jeden Graphen mit Baumweite k kann man so konstruieren:

1. k -Baum

- 1.1 k -Clique ist ein k -Baum

- 1.2 H ist k -Baum $\Rightarrow H + v$ ist k -Baum

2. Teilgraphen bilden



Induktiver Aufbau des Graphen

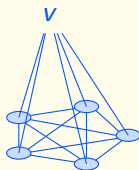
Jeden Graphen mit Baumweite k kann man so konstruieren:

1. k -Baum

- 1.1 k -Clique ist ein k -Baum

- 1.2 H ist k -Baum $\Rightarrow H + v$ ist k -Baum

2. Teilgraphen bilden



Induktiver Aufbau des Graphen

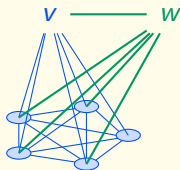
Jeden Graphen mit Baumweite k kann man so konstruieren:

1. k -Baum

- 1.1 k -Clique ist ein k -Baum

- 1.2 H ist k -Baum $\Rightarrow H + v$ ist k -Baum

2. Teilgraphen bilden



Induktiver Aufbau des Graphen

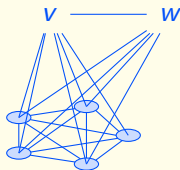
Jeden Graphen mit Baumweite k kann man so konstruieren:

1. k -Baum

- 1.1 k -Clique ist ein k -Baum

- 1.2 H ist k -Baum $\Rightarrow H + v$ ist k -Baum

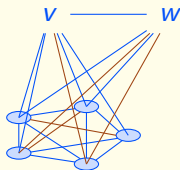
2. Teilgraphen bilden



Induktiver Aufbau des Graphen

Jeden Graphen mit Baumweite k kann man so konstruieren:

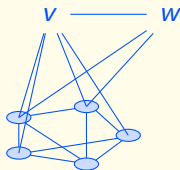
1. k -Baum
 - 1.1 k -Clique ist ein k -Baum
 - 1.2 H ist k -Baum $\Rightarrow H + v$ ist k -Baum
2. Teilgraphen bilden



Induktiver Aufbau des Graphen

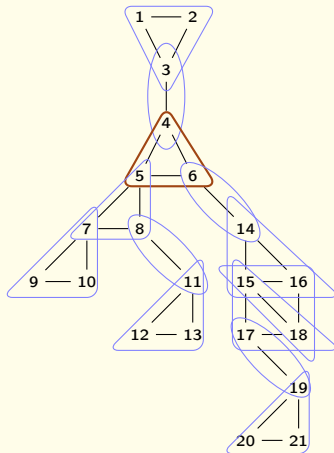
Jeden Graphen mit Baumweite k kann man so konstruieren:

1. k -Baum
 - 1.1 k -Clique ist ein k -Baum
 - 1.2 H ist k -Baum $\Rightarrow H + v$ ist k -Baum
2. Teilgraphen bilden



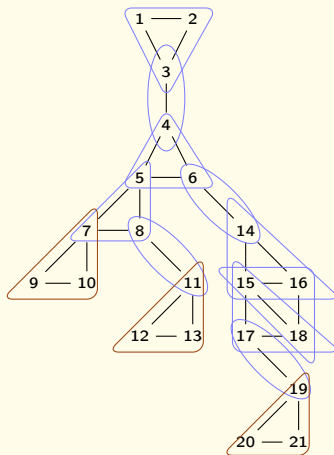
Separatoren

- ▶ $G = (V, E)$ zusammenhängender Graph
- ▶ Ein **Separator**: Menge $S \subseteq V$, so dass $G - S$ mehr als eine Zusammenhangskomponente hat.
- ▶ Kleine Baumweite \Rightarrow Bags sind kleine Separatoren.



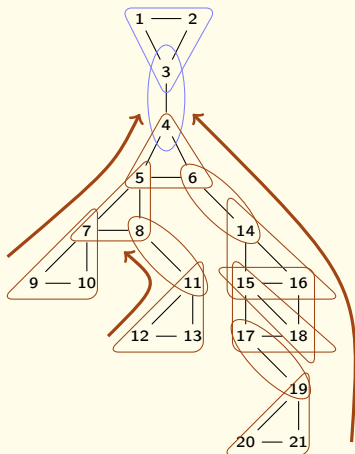
Dynamische Programmierung auf der Baumzerlegung

- ▶ Bags klein \Rightarrow beliebige Berechnungen auf **Blätter-Bags**
- ▶ Nutze: Verbindungen zwischen Bags einfach: baumartig!



Dynamische Programmierung auf der Baumzerlegung

- ▶ Bags klein \Rightarrow beliebige Berechnungen auf **Blätter-Bags**
- ▶ Nutzen: Verbindungen zwischen Bags einfach: **baumartig!**



MSO auf Graphen mit beschränkter Baumweite

Monadic Second Order logic =

FO: $\exists x, \forall x, x + 3 \cdot y = 5, \wedge, \vee, \neg$
+ $\exists X, \forall X, Xy$

- ▶ ausdrückbar z.B. "gegebener Graph ist 3-färbbar" (NP-vollständig!)

Theorem

Problem über Graphen

mit beschränkter Baumweite

in MSO ausdrückbar

\Rightarrow *Problem in P lösbar.*

DAG-Weite

Spieltheoretische Beschreibung:

wie Cops und Räuber, aber Räuber läuft entlang **gerichteten** Pfaden.

Es geht um:

- ▶ Äquivalenz: Zerlegungen \sim Spiel
- ▶ Einfache Eigenschaften
- ▶ Schöne Zerlegungen
- ▶ Berechnung einer Zerlegung
- ▶ Paritätsspiele auf Graphen mit beschränkter DAG-Weite
- ▶ Verhältnis zu anderen Komplexitätsmaßen
- ▶ Monotonie

Kelly-Weite

Spieltheoretische Beschreibung:

wie bei DAG-Weite, aber Räuber ist **träge**:
läuft nur, wenn von einem Cop vertrieben,
Räuber ist **unsichtbar**.

Es geht um:

- ▶ Äquivalenz: Zerlegungen \sim Spiel
- ▶ Andere Charakterisierungen
- ▶ Schöne Zerlegungen
- ▶ Berechnung einer Zerlegung
- ▶ Schwere Probleme auf Graphen mit beschränkter Kelly-Weite
- ▶ Verhältnis zu anderen Komplexitätsmaßen
- ▶ Monotonie

Entanglement

Spieltheoretische Beschreibung:

- Räuber ist langsam,
- Räuber darf nicht stehen bleiben,
- Cops dürfen sich nicht gleichzeitig bewegen,
- Cop darf nur auf den Knoten des Räubers springen.

Es geht um:

- ▶ Einfache Eigenschaften,
- ▶ Andere Charakterisierung,
- ▶ Verhältnis zu μ -Kalkül
- ▶ Berechnung von Entanglement
- ▶ Paritätsspiele auf Graphen mit beschränktem Entanglement
- ▶ Verhältnis zu anderen Komplexitätsmaßen

Themenliste

1. DAG-Weite
2. Kelly-Weite (Thema vergeben)
3. Entanglement